

Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

УДК 517.934:517.966

ЮРКОВ

Александр Васильевич

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ
УПРАВЛЯЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ
ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ НА СТРУКТУРУ УПРАВЛЕНИЙ И
ПОГРЕШНОСТЕЙ В ИНФОРМАЦИИ О ПАРАМЕТРАХ СИСТЕМЫ

01.02.01 Теоретическая механика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург

2001

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном университете.

Научный консультант – доктор физико-математических наук, профессор Е.Я. Смирнов

Официальные оппоненты:

- А.М. Лестев, доктор физико-математических наук, профессор,
- В.А. Соболев, доктор физико-математических наук, профессор,
- Ю.С. Александров, доктор технических наук, профессор

Ведущая организация – Научно–исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

Защита состоится « 22 » ноября 2001 года на заседании диссертационного совета Д-212.232.30 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук в Санкт-Петербургском государственном университете (198904, Санкт-Петербург, Библиотечная пл., 2).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке университета.

Автореферат разослан « 20 » сентября 2001 года

Ученый секретарь диссертационного совета

доктор физико-математических наук, профессор

С.А. Зегжда

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертация посвящена задаче стабилизации программных движений управляемых динамических систем. Задача в общих словах состоит в выборе управлений, обеспечивающих за ограниченное время требуемую точность выполнения программного (т.е. желаемого) движения. Особенностью работы является развитие математической теории, обеспечивающей решение задачи стабилизации при наличии диктуемых практикой ограничений на структуру управлений и информацию о параметрах системы и действующих на нее возмущающих силах.

Данная проблема имеет большой теоретический интерес, поскольку подобные задачи возникают в многочисленных приложениях, в частности, в задачах управления техническими объектами. Основное внимание в диссертации уделено разработке методов построения импульсных, а именно, дискретных по уровню и по времени управлений. Исследованы ситуации, когда конструктивные параметры системы, в том числе характеристики исполнительных органов, известны с некоторыми (не обязательно малыми) погрешностями из заданных диапазонов. Разработаны эффективные методы синтеза управлений, обеспечивающих стабилизацию программных движений не только «в малом», но и для наперед заданных окрестностей программного движения, т.е. «в большом».

Объекты исследования. В диссертации указаны многопараметрические семейства стабилизирующих («в большом») управлений для следующих классов управляемых динамических систем:

- твердое тело с неподвижной точкой, управляемое приложенным к нему моментом сил, формируемым на основе информации об угловом положении и угловой скорости тела относительно жестко связанной с ним системы координат;
- твердое тело, управляемое маховиками и силовыми гироскопами; в этом случае дополнительно используется информация о движении маховиков и гироскопов относительно тела;
- системы, описываемые уравнениями Лагранжа второго рода, у которых управлениями являются обобщенные силы, формируемые на основе информации об обобщенных координатах и обобщенных скоростях системы;
- линейные по управлению системы, описываемые системами обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)[u - u_p(t) + \psi(t, x, p)]$$

в которых нелинейности и определяемые погрешностями величины принадлежат линейной оболочке столбцов матрицы коэффициентов при управлении. Эти системы выбраны как объект, на примере которого излагается суть разработанной методики решения задач стабилизации. В связи с этим для простоты изложения для таких систем предполагается, что система линейного приближения в окрестности программного движения $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ может быть сделана экспоненциально устойчивой выбором линейного управления $u = M(t)x$. Все результаты, полученные для указанных систем при некоторых предположениях справедливы и для общего случая, охватывающего все рассматриваемые в работе динамические системы, - квазилинейных систем иерархической структуры:

$$\dot{x}_i = A_i(t)x + B_i(t) \left\{ \sum_{j=1}^i [C_{ij}(t) + P_{ij}(t, x)]x_j + [E_i + P_i(t, x)]C_{ii+1}(t)x_{i+1} + \psi_i(t, x, p) \right\}$$

где x_i - n_i - мерный подвектор вектора фазовых переменных x , $i=1..k$, $\sum_{i=1}^k n_i = n$;

причем $x_{k+1} = u$ - управление; $A_i(t)x$, $B_i(t)$, $C(t)$ - известные ограниченные матрицы соответствующих размерностей; E_i - единичные матрицы; $P_{ij}(t, x)$ и $P_i(t, x)$ - матрицы погрешностей; $\psi_i(t, x, p)$ - векторы нелинейностей. Для таких систем требуется, чтобы подсистемы $\dot{x}_i = A_i(t)x_i + B_i(t)u_i$ были стабилизируемыми, а матрицы $C_{ii+1}(t)$ и погрешности $P_{ij}(t, x)$ и $P_i(t, x)$ удовлетворяли некоторым дополнительным условиям.

Рассмотрена следующая общая постановка задачи стабилизации, которая конкретизируется применительно к изучаемым классам управляемых динамических систем. Пусть имеется управляемая система, состояние которой в каждый момент времени полностью определяется вектором фазовых переменных x . Такими переменными могут быть, например, обобщенные координаты и обобщенные скорости. Под движением системы при данном управлении будем понимать решение $x = x(t, x_0, t_0)$ системы уравнений, описывающих ее поведение (x_0 - начальное состояние системы). Пусть $x_p(t)$ обозначает программное движение системы. Пусть G_δ обозначает заданную ограниченную окрестность начальной точки программного движения, например, шар радиуса δ с центром в точке $x_p(t_0)$: $G_\delta = \{x : \|x - x_p(t_0)\| \leq \delta\}$; G_ε - заданную ограниченную ε -трубку

программного движения, например, $G_\varepsilon = \{x : \|x - x_p(t_0)\| \leq \varepsilon, t \geq t_0\}$; u - вектор управлений, которыми мы можем воздействовать на систему.

Задача стабилизации программного движения управляемой системы состоит в выборе управлений, при которых любые движения системы, начинающиеся в окрестности G_δ программного движения, за ограниченное время попадают в окрестность G_ε этого движения и в дальнейшем там остаются. Управления, решающие данную задачу, называются в работе стабилизирующими.

Отметим, что начальное множество G_δ не предполагается малым – оно может быть наперед заданным ограниченным, т.е. в данной постановке речь идет о стабилизации «в большом». Далее, в диссертации предполагается, что в информации о конструктивных параметрах управляемой системы, включая исполнительные органы и измерительные устройства, могут быть не обязательно малые погрешности из наперед заданных ограниченных диапазонов.

Стабилизирующие управления могут конструироваться как непрерывные функции времени и измеряемых характеристик движения. Однако во многих практически важных ситуациях из-за конструктивных особенностей составляющих систему управления частей - измерительных устройств, командных устройств и исполнительных органов – более предпочтительным оказывается использование моделей, предполагающих, что информация между устройствами может передаваться в дискретные моменты времени и в дискретном виде, а исполнительные органы могут реализовывать управления, принимающие значения из некоторых фиксированных дискретных множеств. Отсюда возникает необходимость исследования различного рода дискретных моделей управления, в частности, дискретных по уровню управлений.

В диссертации рассмотрены следующие дискретные по уровню управления, различающиеся законом переключения с одного дискретного значения управления на другое: шаговые, релейные, импульсные.

Под *шаговым* понимается такое управление, компоненты которого могут принимать лишь заданные дискретные значения (будем называть их уровнями). Для простоты изложения предположено, что уровни кратны некоторым положительным числам h_i , задающим величину шага дискретности для i -й компоненты управления. Шаговое управление $u_{ш}$ определяется по некоторому непрерывному управлению u . Пусть $u_1, u_2, \dots, u_n$ - компоненты управления u (будем

называть его базовым), t_i^N - моменты времени, когда осуществляется изменение значений i -й компоненты u_{ui} управления u_{ui} , u_{ui}^N - значение компоненты u_{ui} после N -го переключения с уровня на уровень, а u_{ui}^0 - значение этой компоненты до первого переключения. Значения u_{ui}^N задаются рекуррентными формулами

$$u_{ui}^0 = n_i h_i, \quad u_{ui}^N = u_{ui}^{N-1} + h_i \text{sign}(u_i|_{t=t_i^N} - u_{ui}^{N-1}),$$

где n_i - целые числа, удовлетворяющие следующим неравенствам:

$$(u_i|_{t=t_0})/h_i - 1/2 \leq n_i < (u_i|_{t=t_0})/h_i + 1/2.$$

Моменты времени t_i^N задаются как моменты нарушения неравенств

$$|u_{ui}^{N-1} - u_i| \leq h_i/2 + \Delta_i,$$

где Δ_i - некоторые положительные числа. Тогда

$$u_{ui} = \begin{cases} u_{ui}^0 & \text{при } t \in [t_0, t_i^1), \\ u_{ui}^N & \text{при } t \in [t_i^N, t_i^{N+1}) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n; \quad N = 1, 2, 3, \dots).$$

Для задания шагового управления необходимо указать базовое управление и числа h_i, Δ_i .

Релейным управлением в работе называется управление вида $u_{pi} = K\varphi(\sigma)$,

где $K = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n)$ - диагональная $n \times n$ - матрица, элементы которой суть кусочно-постоянные функции измеряемых характеристик движения; $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)^*$ - вектор управляющих сигналов; $\varphi(\sigma)$ - вектор-функция, компоненты $\varphi_i(\sigma_i)$ которой определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \varphi_i(\sigma_i) &= \text{sign}(\sigma_i) && \text{при } |\sigma_i| \geq l_i, \\ |\varphi_i(\sigma_i)| &\leq 1 && \text{при } |\sigma_i| < l_i, \end{aligned}$$

где l_i - неотрицательные числа. Вне зоны $[-l_i, l_i]$ функции φ_i известны точно, а внутри нее - лишь с точностью до оценок. Для задания релейного управления необходимо указать функции k_i , управляющие сигналы σ_i и числа l_i . Отметим, что указанная модель включает различные случаи, встречающиеся в литературе: идеальное реле ($l_i = 0$), линейная функция с насыщением ($\varphi_i(\sigma_i) = \sigma_i$ при $|\sigma_i| < l_i$), реле с гистерезисом и другие.

Импульсное управление характеризуется тем, что его компоненты являются кусочно-постоянными функциями и могут иметь ненулевую

абсолютную величину лишь на некоторых промежутках времени, которые будем называть промежутками импульса. Знаки компонент управления и их амплитуды задаются в момент начала импульса и не изменяются на промежутке импульса. Импульсное управление определяется формулой $u = K\varphi(t, \sigma)$, где K, σ - те же матрица и вектор, что и в определении релейного управления, а $\varphi(t, \sigma)$ - вектор-функция, компоненты $\varphi_i(t, \sigma_i)$ которой задаются формулами

$$\varphi_i(t, \sigma_i) = \begin{cases} \bar{\varphi}_i(\sigma_i|_{t=t_i^N}) & \text{при } t \in [t_i^N, t_i^N + \tau_i] \\ 0 & \text{при } t \in (t_i^N + \tau_i, t_i^{N+1}) \end{cases}$$

Здесь $\bar{\varphi}_i$ - кусочно-постоянные функции, t_i^N - момент начала N -го импульса по i -й компоненте управления, причем $t_i^0 = t_0$ (t_0 - начальный момент времени), τ_i - длительность импульсов i -й компоненты управления; $i = 1, 2, \dots, n$ $N = 1, 2, 3, \dots$ Относительно временных промежутков $[t_i^N, t_i^{N+1}]$, фигурирующих в определении импульсного управления, предполагается, что $t_i^{N+1} - t_i^N \geq T_i$, где T_i - заданные положительные константы. Для задания импульсного управления нужно указать функции φ_i, k_i , управляющие сигналы σ_i , моменты времени t_i^N и числа τ_i, T_i . В диссертации рассмотрены две схемы импульсного управления: с формированием управляющих сигналов по интегралу отклонения от стабилизирующего управления, выбранного за базовое, и с формированием сигналов по принципу широтно-импульсной модуляции (ШИМ).

Методы исследования. Исследования, результаты которых отражены в настоящей диссертации, проводились методами математической теории управления и качественной теории дифференциальных уравнений. При решении задачи стабилизации весьма плодотворным оказался метод функций Ляпунова, развитие которого связано в первую очередь с именами отечественных ученых: В.И. Зубова, Н.Н. Красовского, А.М. Летова, И.Г. Малкина, В.М. Матросова, Н.Г. Четаева и др. Выполненные исследования лежат в русле идей, характерных для школы В.И. Зубова, и развивают результаты, полученные Е.Я. Смирновым.

Научная новизна. В диссертации изложены опубликованные автором в [1-15] результаты, полученные применительно к задаче стабилизации программных движений управляемых динамических систем. Эти результаты существенно развивают теорию стабилизации программных движений динамических систем с учетом диктуемых практикой особенностей структуры

управлений и получаемой о системе информации, доведя эту теорию до вполне завершённого состояния. Задача стабилизации решена «в большом» для следующих классов управляемых систем:

- систем, описываемых уравнениями Эйлера-Пуассона, характерных для задач управления вращательным движением твёрдого тела при помощи момента сил, формируемого на основе информации об угловом положении и угловой скорости тела относительно жёстко связанной с телом системы координат;
- систем, описывающих вращательное движение твёрдого тела, управляемого установленными на нём маховиками и силовыми гироскопами; в этом случае дополнительно используется информация о движении маховиков и гироскопов относительно тела;
- систем, описываемых уравнениями Лагранжа второго рода, у которых управлениями являются обобщённые силы, формируемые на основе информации об обобщённых координатах и обобщённых скоростях системы;
- квазилинейных систем иерархической структуры, описанных выше.

Новыми результатами, составляющими основу диссертации, являются:

- метод анализа перечисленных выше управляемых систем, заключающийся в использовании удачно выбранных функций Ляпунова и построении для них удобных мажорант; этот метод, изложенный на примере линейных по управлению систем, первоначально был разработан для управляемых систем, описываемых уравнениями Лагранжа второго рода, и опубликован в [3, 5] ¹. Результаты, полученные для задач стабилизации вращательного движения твёрдого тела опубликованы в [12, 13];
- методика, позволяющая распространять способы построения стабилизирующих управлений на случай непрямого регулирования; эта методика, основа которой состоит в выделении при необходимости дополнительных стабилизируемых переменных и организации, если необходимо, процесса разгрузки управляющих устройств, изложена в §4, а в §6 применена для решения задач стабилизации вращательного движения твёрдого тела с помощью

¹ Указанные результаты получены автором в 1988-1989 гг. см. депонированные статьи:

- Юрков А.В. Импульсная стабилизация программных движений лагранжевых систем. - Депонирована в ВИНТИ, № 5820-B88 от 20.07.88, 16 с.
- Юрков А.В. Стабилизация динамической ориентации твёрдого тела с помощью импульсных управлений. - Депонирована в ВИНТИ, № 5821-B88 от 20.07.88, 20 с.
- Юрков А.В. Импульсная стабилизация программных движений управляемых динамических систем. - Депонирована в ВИНТИ, № 3217-B89 от 16.05.89, 10 с.

маховиков и гироскопов; конкретные результаты, полученные автором для этих задач, опубликованы в [1, 6-10]²;

- методика учета «динамических» погрешностей в информации о параметрах системы, т.е. отклонений от расчетного (без погрешностей) варианта, описываемых собственными дифференциальными уравнениями; §5 содержит схематичное изложение данной методики, позволяющей за счет выделения из сложного движения исследуемой системы некоторой составляющей его «быстрой» части, определяемой погрешностями, осуществить декомпозицию исследуемой системы, сохранив преимущество в используемом для решения задачи стабилизации математическом аппарате и при увеличении уровня иерархичности исследуемой динамической системы; в §6 показано, как указанная методика работает при необходимости учета различного рода погрешностей в задачах стабилизации вращательного движения твердого тела; конкретные результаты, полученные автором для этих задач, опубликованы в [1, 6-10].

- построение в удобном для приложений виде многопараметрических семейств управлений, в том числе импульсных, которые решают задачу стабилизации при наличии необязательно малых погрешностей в информации о параметрах системы и действующих на нее возмущающих силах; в §4 на примере линейных по управлению систем показано как осуществляется построение импульсных управлений, реализуемых по интегралу от специальным образом выбираемого базового управления, в частности, управлений, организованных по принципу широтно-импульсной модуляции (ШИМ); в §6 построение импульсных стабилизирующих управлений осуществлено для динамических систем, описываемых уравнениями Лагранжа второго рода, и систем, описываемых уравнениями Эйлера-Пуассона; результаты, полученные автором для случая импульсных управлений, опубликованы в [3, 11-13].

Теоретическая значимость работы. Излагаемая в диссертационной работе методика позволяет в рамках единого подхода строить непрерывные и различного рода дискретные (шаговые, релейные, импульсные) стабилизирующие

² Эти результаты датированы 1979 г. - см. депонированные статьи:

- Смирнов Е.Я., Юрков А.В. Управление трехосной ориентацией твердого тела при помощи силовых гироскопов. - Депонирована в ВИНТИ, № 381 от 31.01.79, 50 с.
- Смирнов Е.Я., Юрков А.В. Управление трехосной ориентацией твердого тела при помощи силовых гироскопов. Релейное управление.-Депонирована в ВИНТИ, № 1084 от 27.03.79, 12 с.
- Смирнов Е.Я., Юрков А.В. Управление трехосной ориентацией твердого тела при помощи силовых гироскопов. Учет упругих деформаций элементов подвесов гироскопов. - В сб.: "Управление в динамических системах", с.9-16. Депонирована в ВИНТИ, №2794 от 24.07.79, 7с.

управления, решающие задачу «в большом», причем при наличии не обязательно малых погрешностей в информации о конструктивных параметрах управляемой системы и действующих на нее силах.

Практическая значимость работы. Разработанные методы позволили построить в удобном для приложений виде многопараметрические семейства управлений, которые решают задачу стабилизации при наличии необязательно малых погрешностей в информации о параметрах системы и действующих на нее возмущающих силах. Фактически свободные параметры стабилизирующих управлений позволяют решать другие практически важные задачи, такие как выбор наилучших в некотором смысле стабилизирующих управлений, оптимизацию времени перехода в целевую окрестность программного движения и другие. Результаты использованы при проведении НИР по договорной тематике.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на ряде отечественных и международных конференций, в том числе:

- IX и X Международных конференциях по нелинейным колебаниям, (Киев, 1981; Варна, 1984);
- Международной школе по методу функций Ляпунова (Иркутск, 1989);
- IV конференции по дифференциальным уравнениям и их приложениям (Болгария, Руссе, 1989);
- 2 Российско-Китайский симпозиуме по астронавтике. (Самара, 1992);
- Международном симпозиуме по аэрокосмическим системам (Санкт-Петербург, 1992);
- Международном Конгрессе по вычислительным системам и прикладной математике (Санкт-Петербург, 1993);
- Международной конференции "Stability and Control of Transforming Nonlinear Systems. Int. Conference ". (Москва, 1995).
- Международной научно-практической конференции “Дифференциальные уравнения и их применения” (Санкт-Петербург, 1996),
- IV Украинско-Российско-Китайском Симпозиуме по космической науке и технике. (Киев, 1996)
- International conference on systems, signals, control, computers SSCC'98 (Durban, 1998).

Результаты диссертации обсуждались на следующих семинарах:

- Семинаре отдела общей механики Института механики МГУ (рук. акад. А.Ю.Ишлинский) (Москва, 1995),
- Семинаре Московского филиала Института проблем транспорта РАН (рук. акад. В.М.Матросов) (Москва, 1995),
- Семинаре кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета СПбГУ (рук. д.ф.м.н. профессор П.Е.Товстик) (Санкт-Петербург, 1995),
- Семинаре кафедры теоретической кибернетики математико-механического факультета СПбГУ (рук. д.ф.м.н., профессор Г.А.Леонов) (Санкт-Петербург, 1997),
- 8 Всероссийском семинаре по управлению движением и навигации летательных аппаратов", Самара, 1997.

Значительная часть работы нашла отражение в специальном курсе «Управление движением механических систем», читавшемся автором совместно с Е.Я. Смирновым в 1980-1989 гг. на факультете прикладной математики – процессов управления Ленинградского государственного университета.

Публикации. Содержание диссертации опубликовано в 37 работах, включая монографии и учебное пособие (в соавторстве). Список основных публикаций автора по теме диссертации приведен в конце автореферата. Из результатов работ, выполненных в соавторстве, в диссертацию включены только результаты, принадлежащие автору. Ряд результатов отражен в отчетах по НИР в рамках Федеральной целевой программы «Интеграция».

Структура и объем работы. Изложение материала диссертации подчинено следующей схеме: в § 1 даны постановки задач, результаты решения которых сведены в диссертации. Второй параграф посвящен описанию методов решения задачи стабилизации и предложенных для этой цели функций Ляпунова. В §§ 3-6 на примере линейных по управлению динамических систем изложена разработанная автором теория построения непрерывных и различного рода дискретных (шаговых, релейных, импульсных) стабилизирующих управлений. § 7 содержит изложение результатов, полученных автором с использованием этой теории в приложениях: управлении вращательным движением твердого тела и управлении движением электромеханических систем, описываемых уравнениями Лагранжа второго рода. Основное внимание при изложении материала

диссертации уделено ключевым моментам работы. Технические подробности, чтобы не загромождать изложения, как правило, опущены. Однако, при этом всегда дается ссылка на публикацию автора, где для изложенного схематично вопроса приведены подробные рассуждения.

В приложении в удобной для анализа форме дан вывод уравнений исследуемых в диссертации управляемых динамических систем, представляющих собой твердое тело с маховиками и силовыми гироскопами; выведены уравнения, описывающие изменение переменных типа параметров Родрига-Гамильтона, используемых для описания взаимного расположения ориентируемых и опорных осей в задачах стабилизации вращательного движения твердого тела; доказан ряд вспомогательных утверждений.

Общий объем работы составляет 181 страницу. Список литературы включает 166 наименований. Иллюстраций – 6.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Решение задачи стабилизации для рассмотренных в работе управляемых динамических систем осуществлено с использованием прямого метода Ляпунова. Для линейных по управлению систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка, разрешенными относительно производных, предполагается, что выполнены условия, гарантирующие возможность построения для них функций Ляпунова. Для систем, описываемых уравнениями Лагранжа второго рода и уравнениями Эйлера-Пуассона, подходящие функции Ляпунова указаны - это один из результатов диссертации.

Изложение методики решения задачи стабилизации в диссертации сделано на примере управляемой динамической системы:

$$\dot{x} = f(t, x, p) + h(t, x, p)[u - u_p(t, p)], \quad (1)$$

где $x \in R^n$ - фазовый вектор системы, $x \equiv 0$ - программное движение, $u \in U \subset R^r$ - вектор управлений непрерывного или дискретного типа, $p \in P \subset R^m$ - вектор погрешностей, характеризующий неполноту знания конструктивных параметров объекта управления и законов среды, в которой происходит его движение; $t \in R^+ = \{t : t \geq t_0\}$ - время, t_0 - начальный момент времени; $G_\delta = \{x : \|x\| \leq \delta\}$ и $G_\varepsilon = \{x : \|x\| \leq \varepsilon\}$ - начальная и целевая окрестности программного движения, а

$u_p(t, p)$ - "управление", при котором программное движение $x \equiv 0$ является решением системы (1).

Суть методики решения сформулированной в §1 задачи стабилизации программного движения состоит в следующем. Опираясь на структуру правой части указанных уравнений, строятся зависящие от параметров Π скалярные функции $v = v(t, x, p, \Pi)$, $w = w(t, x, p, \Pi)$ и вектор-функция $\xi = \xi(t, x, p, \Pi)$ такие, что на решениях исследуемой системы имеет место соотношение:

$$\dot{v} = -w + \eta^*(u - \xi) \quad (2)$$

где $\eta = h^* \frac{\partial v}{\partial x}$. Принципиальным при этом является выбор такой функции v , чтобы вектор η был *независим* от погрешностей p , т.е. $\eta = \eta(t, x, \Pi)$. Выбором параметров Π обеспечивается, чтобы на решениях исследуемой системы, начинающихся в множестве G_δ , для $\forall p \in P$ выполнялись соотношения

$$v_1 \|x\|^2 \leq v \leq v_2 \|x\|^2, \quad w_1 \|x\|^2 \leq w \leq w_2 \|x\|^2 \quad (3)$$

$$\|\eta\| \leq \bar{X} \|x\|, \quad \|\xi\| \leq \bar{\xi} \quad (4)$$

где $v_i, w_i, \bar{X}, \bar{\xi}$ - некоторые положительные числа, определяемые параметрами системы, начального множества и диапазонами значений погрешностей.

Из соотношений (3), (4) следует, что если бы можно было реализовать управление $u = \xi$, то любые решения исследуемой системы, начинающиеся в множестве G_δ , асимптотически стремились бы к программному движению, удовлетворяя экспоненциальным оценкам вида

$$\alpha_1 \|x_0\| e^{-\beta_1(t-t_0)} \leq \|x\| \leq \alpha_2 \|x_0\| e^{-\beta_2(t-t_0)}$$

где $\alpha_1 = v_1 / v_2$, $\alpha_2 = v_2 / v_1$, $\beta_1 = w_2 / v_1$, $\beta_2 = w_1 / v_2 \equiv \alpha$. Однако, реализовать закон управления $u = \xi$, вообще говоря, невозможно, так как погрешности p неизвестны, а управление u может принадлежать допустимому классу, не содержащему ξ .

Построение стабилизирующего управления осуществляется следующим образом. Выбором параметров управления обеспечиваются соотношения:

$$\dot{v} \leq -\alpha v + \beta, \quad v \leq a e^{-\alpha(t-t_0)} + b, \quad (5)$$

где α, a, b, β - некоторые положительные величины, причем либо b , либо и b , и β могут быть сделаны сколь угодно малыми. Это, учитывая оценки (3), позволяет

утверждать, что за ограниченное время вектор x попадает в наперед заданную окрестность нуля и построенные управления являются стабилизирующими.

В каждом конкретном случае анализируемых в диссертации управляемых динамических систем и допустимых управлений процедура получения соотношений вида (5) - своя. Эти процедуры описаны в параграфах 3-7.

Вопросы поиска подходящих функций Ляпунова представляют собой нетривиальную задачу. При анализе сугубо нелинейных систем они, как известно, подбираются в значительной мере эвристически и удачный выбор искомой функции в известной мере предопределяет успех в решении задачи синтеза стабилизирующих управлений.

При решении задач стабилизации программных вращений твердого тела с неподвижной точкой отправной послужила идея В.И.Зубова³ об использовании функции Ляпунова типа полной механической энергии системы

$$v = \frac{1}{2} \omega^* \theta \omega + a(s_1 - \sigma_1)^2$$

Эта функция использовалась для качественного исследования системы уравнений Эйлера-Пуассона с точки зрения устойчивости программного движения, соответствующего одноосной ориентации $s_1 \equiv \sigma_1$, $\omega \equiv 0$. В работе Е.Я. Смирнова⁴ для решения задач активного управления вращательным движением твердого тела использовалась функция (в обозначениях §1)

$$v = \frac{1}{2} \omega'^* \theta \omega' + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} s_i'^* s_j' + f \omega'^* \theta C \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} [s_i' \times \sigma_j], \quad (6)$$

где a_{ij} , f - скалярные параметры, C - постоянная матрица, $s_i' = s_i - \sigma_i$, а вектор ω' определяется равенством либо $\omega' = \omega_s - \omega_\sigma$ - для трехосной стабилизации, либо $\omega' = \omega_s - \omega_\sigma + \beta(t)\sigma_1$ - для одноосной. Особенность этой функции - наличие «перекрестного» члена специальной структуры - последнее слагаемое в (6). Именно введение этого слагаемого позволило решить вопрос о построении внешних управляющих моментов, решающих задачу стабилизации динамической ориентации вращающегося твердого тела при наличии необязательно малых погрешностей в информации о тензоре инерции тела и моменте внешних возмущающих сил.

³ Зубов В.И. Об активном управлении вращательным движением твердого тела. – Дифференциальные уравнения, 1970, т.6, №11, с.2086-2087.

⁴ Смирнов Е.Я. Некоторые задачи математической теории управления. Л., 1981, 200 с.

В диссертации используется аналогичная (6) функция

$$v = \frac{1}{2} \omega'^* \theta \omega' + \frac{\alpha}{2} \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} s_i^* s_j' + \omega'^* \theta C \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} [s_i' \times \sigma_j], \quad (7)$$

в которой малый параметр f в последнем слагаемом заменен на большой параметр α при «потенциальной» части функции. Это позволило внести некоторые изменения в структуру вектора η в (2), устранив малый параметр f в его выражении.

Функция Ляпунова, аналогичная по структуре (7), используется и для анализа управляемых систем, описываемых уравнениями Лагранжа второго рода

$$v = \frac{1}{2} \dot{q}^* \theta \dot{q} + \frac{\alpha}{2} \dot{q}^* A q + \dot{q}^* \theta C A q \quad (8)$$

В выражении (8) A, C - постоянные матрицы, α - выбираемый параметр, θ - матрица при квадратичном относительно обобщенных скоростей $\dot{q}$ слагаемом в выражении для кинетической энергии системы.

Для анализа управляемых динамических систем вида (1), стабилизируемых по линейному приближению $\dot{x} = Ax + Bu$ управлениями вида $u = Mx$ с вещественной непрерывной и ограниченной матрицей, функции Ляпунова выбирались в виде определенно положительных квадратичных форм

$$v = x^* V x, \quad w = x^* W x, \quad (9)$$

вещественные непрерывные и ограниченные матрицы которых удовлетворяют матричному уравнению Ляпунова вида $\dot{V} + A^* V + V A = -W$, где $A = A + BM$. Такой подход к выбору функций Ляпунова в этом случае объясняется желанием автора акцентировать внимание на методике работы с этими функциями, а не на проблеме их поиска. Способ построения функций Ляпунова для общего случая квазилинейных систем иерархической структуры дан Е.Я.Смирновым (см. сноску 4 на стр. 14).

В задачах стабилизации по части переменных при непрямом регулировании использование описанной выше методики синтеза управлений возможно после предварительного выделения дополнительных стабилизируемых переменных - обозначим их через χ - и введения в рассмотрение функций Ляпунова вида

$$v' = v + \frac{1}{2k} \chi^2, \quad (10)$$

где v - указанные выше функции, k - выбираемый положительный параметр. Эта функция используется при построении искомых управлений в основном режиме, когда регулирование осуществляется за счет использования лишь компонент вектора управления, соответствующих переменным, не подлежащим стабилизации, т.е. переменным, описывающим динамику исполнительных органов.

При возникновении угрозы нарушения ограничений на переменные, не подлежащие стабилизации, от основного режима переходят к режиму разгрузки, когда исполнительные органы приводятся в состояние, близкое к исходному, а управление, осуществляющее «прямое» регулирование, обеспечивает стабилизацию программного движения и парирование воздействия не подлежащих стабилизации переменных. Для индикации необходимости перехода от основного режима к режиму разгрузки можно использовать функции Ляпунова, подобные функциям (7) и (8), но относительно переменных, не подлежащих стабилизации. Достижение выбранной функцией задаваемого уровня в основном режиме, учитывая неравенства (3), служит признаком возникновения угрозы нарушения ограничений для переменных, не подлежащих стабилизации, и, следовательно, - признаком перехода на режим разгрузки. Аналогично, в режиме разгрузки достижение желаемой близости к нулю значений выбранной функции является основанием для перехода на основной режим управления. Конкретные выражения для функций Ляпунова, используемых для индикации переходов от основного режима к режиму разгрузки для анализируемых в диссертации управляемых динамических систем указаны.

Описанные методы работы с предложенными функциями Ляпунова позволяют строить непрерывные и различного рода дискретные (по уровню и времени) управления, решающие задачу стабилизации при наличии погрешностей из заданных диапазонов $p \in P$. Основными факторами, определяющими возможность применения описанных методов, является независимость вектора η от p и получение оценок (4) для норм векторов ξ и η в (2) через известные границы диапазонов погрешностей и параметры начального множества.

При учете «динамических» погрешностей, которые описываются собственными дифференциальными уравнениями и являются скорее конструктивными особенностями управляемой системы, указанные оценки

получить не удастся из-за появления в уравнениях системы и, как следствие, в выражении для ξ старших производных этих погрешностей.

При наличии «динамических» погрешностей, вектор погрешностей имеет структуру $p = \text{col}(p_1, p_2, \dot{p}_2)$, где символом p_1 обозначены не зависящие от времени погрешности с априорными оценками диапазонов их возможных значений, а символом p_2 - «динамические» погрешности, описываемые собственными дифференциальными уравнениями. Если бы каким-либо преобразованием исходной системы удалось из ее уравнения убрать вектор $\dot{p}_2$, то в предположении об ограниченности вектора p_2 описанная выше методика использования подходящих функций Ляпунова и мажорант для них позволила бы построить стабилизирующие управления. Последующий анализ уравнений для p_2 должен дать условия на параметры системы, при которых предположения о принадлежности p_2 выбранным диапазонам справедливо.

Для управляемых систем, описываемых уравнениями Лагранжа второго рода, указанную манипуляцию удастся осуществить, когда обусловленный погрешностями p_2 вектор входит в выражение для обобщенного кинетического момента системы линейно: $L = \theta \dot{q} + f_n$, где $f_n = f_n(t, q, p_1, p_2)$ - непрерывная функция своих аргументов, ограниченная как функция времени и обращающаяся в нуль, при $p_2 = 0$. Это имеет место, например, для твердого тела с упруго присоединенными элементами. Для вращающегося твердого тела с маховиками и гироскопами подобные ситуации имеют место в случаях, когда, имеются малые упругие деформации элементов подвеса маховиков и гироскопов, когда учитывается динамика приводов и т.д. Соответствующие ситуации подробно рассмотрены в Приложении к диссертации.

Линейная неособая замена переменных

$$\theta \dot{q} = \theta \dot{q} + f_n \quad (11)$$

выделяет из сложного движения изучаемой системы некоторую составляющую его «быстрой» части, определяемую погрешностями. Из уравнений системы и вектора ξ в (2) в результате этой замены удаляются производные динамических погрешностей p_2 . Отметим также, что в результате указанной замены переменных коррекции подвергается и стабилизируемое движение системы, которое при достаточно малых величинах погрешностей близко к программному.

По отношению к используемым для построения стабилизирующих управлений функциям Ляпунова сказанное означает, что для синтеза стабилизирующих управлений можно использовать функции (6)-(10), в которых стабилизируемые переменные заменены на «близкие» преобразованиями вида (11).

В ряде случаев, как например для трехстепенных силовых гироскопов в конирующих подвесах, при построении стабилизирующих управлений представление вида (11) удобно применить и в расчетном (без погрешностей) варианте, рассматривая отклонения центров инерции элементов подвеса от осей вращения как инструментальные погрешности.

По ряду причин, а именно из-за стремления построить стабилизирующие управления по возможности наиболее простыми как функции измеряемых характеристик движения, задачи стабилизации программных вращательных движений твердого тела с неподвижной точкой целесообразно формулировать и решать, используя в качестве математической модели уравнения Эйлера-Пуассона

$$\begin{aligned}\Theta\dot{\omega} + \omega \times \Theta\omega &= M, \\ \dot{s}_i &= (\omega_s - \omega) \times s_i, \quad (i = 1, 2, 3) \\ \dot{\sigma}_i &= \omega_\sigma \times \sigma_i, \\ s_i^* s_j &= \delta_{ij}, \quad \sigma_i^* \sigma_j = \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3).\end{aligned}\tag{12}$$

Использование уравнений Лагранжа второго рода в этом случае приводит к управлениям весьма сложной структуры. Конкретный вид стабилизирующих управлений, получающихся при решении задачи трехосной стабилизации вращательного движения твердого тела на основе уравнений Лагранжа второго рода приведен в работе автора [3, §4].

Использование для описания вращательного движения твердого тела уравнений Эйлера-Пуассона позволяет построить, в частности, стабилизирующие управления, являющиеся линейными функциями измеряемых характеристик движения [4]⁵. Однако, применение описанной выше методики синтеза искомых управлений с использованием функций Ляпунова вида (6),(7) затруднено наличием интегралов движения. Компромиссным оказался подход, при котором изучение поведения выбранной функции Ляпунова на решениях исследуемой системы осуществляется с использованием аппарата параметров Родрига-

⁵ Указанная монография первоначально депонирована – см.:

- Смирнов Е.Я., Павликов В.Ю., Щербаков П.П., Юрков А.В. Управление движением механических систем. Часть I - Депонирована в ВИНТИ, №5036 от 05.10.82, 120 с.
- Смирнов Е.Я., Павликов В.Ю., Щербаков П.П., Юрков А.В. Управление движением механических систем. Часть 2 - Депонирована в ВИНТИ, № 3952 от 04.06.84, 240 с.

Гамильтона, применяемых для описания взаимного расположения опорных и ориентируемых осей. Удобным при этом оказывается ввести указанные параметры через элементы конечного поворота, совмещающего не сами опорный и ориентируемый триэдры, а сопряженные с ними. При использовании выбранных параметров Родрига-Гамильтона - обозначим их μ_0 и $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)^*$ - уравнения Пуассона $\dot{s}_i = (\omega_s - \omega) \times s_i, (i = 1, 2, 3)$ с интегралами $s_i^* s_j = \delta_{ij}, (i, j = 1, 2, 3)$ заменяются на эквивалентные им соотношения: $\dot{\mu} = \frac{1}{2}(\mu_0 \Sigma^* \omega' + \mu \times \Sigma^* \omega'), \quad \dot{\mu}_0 = -\frac{1}{2} \mu^* \Sigma^* \omega'$ где $\Sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad \omega' = \omega - \omega_1, \quad \omega_1 = \omega_s - \omega_\sigma,$ с одним интегралом $\mu_0^2 + \|\mu\|^2 = 1,$ а функция Ляпунова (7) записывается в виде

$$v = \frac{1}{2} \omega'^* \theta \omega' + 2\alpha \mu^* A \mu + \omega'^* \theta C v,$$

где матрица A и вектор v определяются формулами:

$$A = \begin{pmatrix} a_{22} + a_{33} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{12} & a_{11} + a_{33} & -a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & a_{11} + a_{22} \end{pmatrix}$$

$$v = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} [s_i \times \sigma_j] = 2\Sigma(\mu_0 A \mu - \mu \times A \mu),$$

Доказательство этих и некоторых других полезных утверждений приведено в Приложении к диссертации.

Описанные выше методы позволили в удобном для приложений виде построить многопараметрические семейства управлений, в том числе импульсных, которые решают задачу стабилизации при наличии необязательно малых погрешностей в информации о параметрах системы и действующих на нее силах. В качестве примера приведем теорему об импульсном стабилизирующем управлении для задачи стабилизации трехосной динамической ориентации твердого тела при помощи приложенного к нему момента сил. Уравнения, исследуемые в этом случае, имеют вид (12). Программное движение задается соотношением $s_i \equiv \sigma_i (i = 1, 2, 3)$. Окрестности программного движения имеют вид:

$$G_\delta = \{\omega, s_1, s_2, s_3 \mid \|\omega - \omega_p\| \leq \delta_\omega, \|s_i - \sigma_i\| \leq \delta_i, i = 1, 2, 3\},$$

$$G_\varepsilon = \{\omega, s_1, s_2, s_3 \mid \|\omega - \omega_p\| \leq \delta_\varepsilon, \|s_i - \sigma_i\| \leq \varepsilon_i, i = 1, 2, 3, t \geq t_0\},$$

Теорема. Пусть множество G_δ удовлетворяет условию $\sum_{i=1}^3 \delta_i^2 < 8$. Тогда существует базовое стабилизирующее управление M_c и положительные константы p_{i0}, k_{i0} такие, что при $\forall p_i \in (0, p_{i0}), \forall k_i \in (k_{i0}, +\infty), \forall l_i \in (0, p_i)$ импульсное управление M_y с вектором управляющих сигналов

$$u = -J \equiv -\int_{t_0}^t (M_y - M_c) d\tau,$$

моментами появления импульсов, задаваемыми соотношениями

$$\|J_i(t_i^{N+1})\| = p_i$$

и длительностями импульсов $\tau_i = p_i / k_i (i = 1, 2, 3)$ является стабилизирующим в задаче трехосной стабилизации для наперед заданных диапазонов погрешностей в информации о тензоре инерции Θ и векторе возмущений M_g .

В качестве базового управления можно взять, например, линейное по измеряемым характеристикам движения управление $M_c = -gD\eta$, где

$$\eta = \omega' + C\nu, \omega' = \omega - \omega_1, \omega_1 = \omega_s - \omega_\sigma, \nu = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} s_i \times \sigma_j;$$

параметры a_{ij} которого таковы, что собственные числа матрицы A достаточно велики и имеют достаточно малый разброс, матрицы C и D постоянны и имеют определенно положительные симметризованные $C + C^*$ и $D + D^*$, а величина g достаточно велика.

Отметим, что, как показано в работе [4, с.149], условие $\sum_{i=1}^3 \delta_i^2 < 8$ обеспечивает отсутствие в начальном множестве G_δ достаточно малых окрестностей положений тела, при которых триэдр σ_i симметричен триэдру s_i относительно некоторой оси, причем эти окрестности могут быть сколь угодно малыми. Таким образом, отмеченное условие представляет весьма слабое естественное ограничение на начальное множество. Для задачи одноосной стабилизации указанное условие заменяется на условие $0 < \delta_1 < 2$, т.е. ориентируемый орт в начальный момент времени не должен быть противоположен своему программному положению.

В качестве примера ограничений на конструктивные погрешности исполнительных органов, которые возникают в процессе исследования управляемых систем выбранным методом, приведем условия на погрешности в изготовлении маховиков и установке их относительно носителя в задаче стабилизации трехосной ориентации твердого тела. Приемлемыми для решения задачи стабилизации являются отклонения направлений осей вращения маховиков от расчетных (обозначим их α), удовлетворяющие ограничению $\cos \alpha > 1 - \frac{1}{2s}$, где s – количество маховиков. Для системы из трех маховиков это означает, что отклонения осей вращения маховиков от расчетных не должны превышать 33° . На практике же точность ориентации осей вращения маховиков в носителе значительно выше.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ

1. Смирнов Е.Я., Юрков А.В. Об управлении трехосной ориентацией твердого тела при помощи силовых гироскопов. -В сб.: "Управление, надежность и навигация", Вып. 5, Саранск, 1979, с. 169-176.
2. Смирнов Е.Я., Юрков А.В. Управление техническими объектами и технологическими процессами. Комплексные лабораторные работы. Л., изд-во ЛГУ, 1984, Часть III, с. 1-12.
3. Смирнов Е.Я., Юрков А.В. Управление движением механических систем. Учебное пособие. Л., изд-во ЛГУ, 1988, 81 с.
4. Смирнов Е.Я., Павликов В.Ю., Щербаков П.П., Юрков А.В. Управление движением механических систем. Л., ЛГУ, 1985, 316 с.
5. Смирнов Е.Я., Щербаков П.П., Павликов В.Ю., Юрков А.В. Стабилизация программных движений управляемых систем. - В кн.: "Динамика управления космическими объектами", ред. В.М. Матросов, М.Ф. Решетнев, Новосибирск, "Наука" СО РАН 1992, с. 101-110.
6. Юрков А.В. Управление трехосной ориентацией твердого тела при помощи силовых гироскопов. Учет непостоянства скорости собственного вращения роторов гироскопов. - В сб.: "Управление, надежность и навигация", Саранск, 1980, с. 175-182 .
7. Юрков А.В. Управление трехосной ориентацией твердого тела (носителя) при помощи силовых гироскопов. Учет погрешностей в изготовлении системы. - В сб.: "Прикладные задачи теории управления" Л., изд-во ЛГУ, 1982, с. 75-80.

8. Юрков А.В. Управление ориентацией твердого тела при помощи силовых гироскопов. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Л., 1980, 261 с.
9. Юрков А.В. Управление трехосной ориентацией твердого тела при помощи силовых гироскопов. Учет погрешностей в изготовлении носителя и установке гироскопов относительно носителя. -В сб.: "Управление, надежность и навигация", Саранск, 1981, с. 159-165.
10. Юрков А.В. Стабилизация программного движения механических систем с непрямым регулированием по части переменных. - В сб.: "Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений", Новосибирск, "Наука" СО, 1988, с. 270-273.
11. Юрков А.В. Импульсная стабилизация программных движений управляемых динамических систем - В сб.: "Динамика систем и управление", Саранск, 1993, с. 65-71
12. Юрков А.В. Стабилизация программных движений управляемых систем. – Известия РАЕН серия МММИУ, том 3, 1999, номер 3, стр. 107-120.
13. Юрков А.В. Стабилизация одноосной ориентации твердого тела - – Известия РАЕН серия МММИУ, том 3, 1999, номер 4, стр. 128-144.
14. Юрков А.В. Задачи стабилизации программных движений управляемых динамических систем. - Электронный журнал "Исследовано в России", 14, стр. 147-164 , 2001. <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2001/014.pdf>
15. Юрков А.В. Кинематические соотношения задач стабилизации. - Электронный журнал "Исследовано в России", 15, стр. 165-173, 2001. <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2001/015.pdf>.

Отпечатано на ризографе МЦ СПбГУ
199178, Санкт-Петербург, В.О., 14 линия, 29
Телефон/факс (812) 323-7175 Email edu@icape.nw.ru
Заказ № 143 от 14.06.2001 г. Тираж 100 экз.